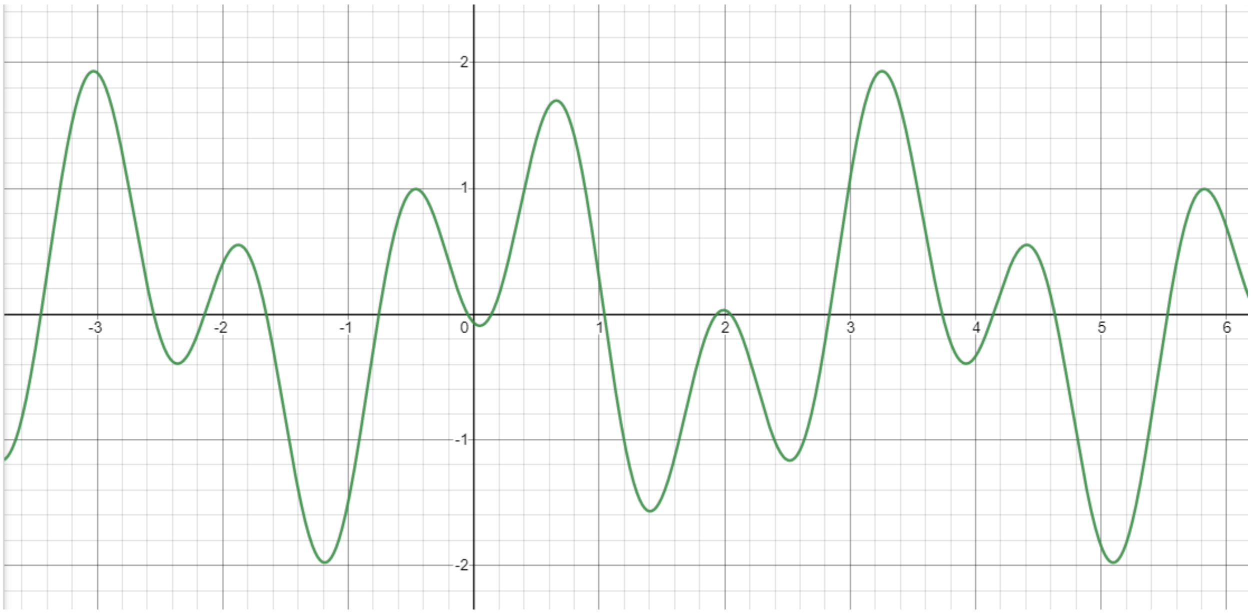
К билетам 6, 7.

Обозначим за f(t) функцию напряжённости некоего источника-чёрного ящика в зависимости от времени. Нарисуем график зависимости f от t. Получим некую функцию. Нам станет интересно: а на каких частотах излучает тело? Понятно, что если мы получили f(t) как косинус, то говно-вопрос: меряем период (время между соседними максимумами), ну и отсюда выражаем единственную частоту.

А теперь чуть более сложный кейз: к вам подходит второкур с прака и приносит вам такой график зависимости f от t, который он экспериментально замерил:



Хм, похоже на синусы-косинусы. Может быть, это их сумма? Вы оказываетесь правы: это на самом деле

$\sin(2t+1)+\sin(5t+e+\pi/2)$

Зная это, вы заключаете, что в чёрном ящике два источника с частотами 2 и 5.

Но у вас возникает логичный опрос: а как можно по графику, по виду функции f(t) понять, является ли это суммой синусов $\sin(\omega_1 * t+\varphi_1)+\sin(\omega_2 * t+\varphi_2)+\ldots$?

Ответ, да. И для этого мы сегодня собрались.

Итак, мы предполагаем, что f(t) является суммой некоторого числа слагаемых с синусом, каждое из которых содержит а) частоту б) фазу.

А эта сумма конечна, счётна или вообще континуальна? Давайте прикинем: частота источника может быть любой, хоть трансцендентной. Он может излучать во на всех частотах. Значит, сумма континуальна, и мы пишем интеграл:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega))\,d\omega$$

Где A(ω) – «вклад» излучения на частоте ω к общему излучению. На коэф пропорциональности перед интегралом пока не обращайте внимания.

Далее есть два пути: по пути комплексных величин и нет. Начнём с первого пути – комплексного.

Сначала заметим, что:

$$f(t)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} A(\omega)e^{i\omega t+\varphi(\omega)}\,d\omega$$

Фазу φ(ω) можно запихнуть в A(ω), введя комплексную величину g(ω), модуль которой - A(ω). Комплексные функции (т.е. функции, переводящие действительный аргумент в комплексное число) будем обозначать тильдами.

$$\tilde{g}(\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

Перезапишем интегральное слагаемое: A(ω)*(exp(i(ωt+ φ(ω))= A(ω)* exp(iωt) exp(i*φ(ω))=g с тильдой(ω)* exp(iωt).
Тогда f(t) запишется как

$$f(t)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Ещё одну вещь сделаем : интеграл от –бесконечности до +бесконечности, а не как у нас было, от 0 до +бесконечности. На самом деле действительная часть от exp(iωt) и exp(-iωt) одинакова и равна cos(ωt), так что мы можем считать, что мы «вклад» излучения на частоте ω поделили пополам – на слагаемое с ω и с –ω.

Мысленно поделив g с тильдой (ω) пополам, получим

$$f(t) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Оказывается, что тогда мы можем найти g с тильдой от (ω) по очень похожей формуле:

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

По сути здесь мы просто заменили t на ω, f на g, и в аргументе экспоненты вылез минус.
То, что g с тильдой (ω) имеет именно такой вид – теорема из матана-3, доказывать мы её не будем.

Последние два равенства – переход от f(t) к g с тильдой(ω) называются двумя преобразованиями Фурье. Одно из них обратное, другое прямое. Не помню, какое какое, и это и не важно.

Комментарии. Если вы начнёте смотреть другие источники по этой теме, то обнаружите следующие особенности:
1) знак Re опускается. Вроде как они считают величину f(t) тоже комплексной.
2) коэффициенты перед интегралами везде разные. У Русакова, например, у одного преобразования он 1, у другого – 1/2π. Их произведение должно быть строго 1/2π, а вот сколько у каждого интеграла – ваша воля. Я предпочитаю и вам советую перед каждым интегралом писать 1/sqrt(2π). Так вам не надо будет думать, какое преобразование перед вами – прямое или обратное, коэффициент одинаков. Только следите за минусом у мнимой экспоненте:

когда вы выражаете f через g, его нет, а когда g через f, он есть. Запомнить это можно так: формула, где f выражается через g, достаточно простая для понимания и очевидная, и там-то как раз минуса нет, минус в неочевидной.

Я обещал и второй путь, без комплексных величин.
Представим себе f(t) в виде чётной функции Ч(t) и нечётной Н(t).
Оказывается, что в разложении Ч(t) φ везде равна 0, т.е. в разложении присутствуют только чистые косинусы:

$$\text{Ч}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty a(w) \cos wt \, dw$$

$$a(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \text{Ч}(t) \cos wt \, dt$$

Для Н(t) аналогично φ везде равна 0, т.е. в разложении присутствуют только чистые синусы:

$$H(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty b(w) \sin wt \, dw$$

$$b(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \text{Ч}(t) \sin wt \, dt$$

Давайте посмотрим. Заметим, что никаких отрицательных частот нет, никаких комплексных величин нет. Ну ляпота же. Зачем тогда нужны были наши страдания с комплексными числами?
Вкратце – через комплексные величины нам будет позже проще считать интенсивность. Про неё мы поговорим немного позже, а пока

Свойства преобразования Фурье:
Линейность – это очевидно.
А вот вам неочевидное свойство, которое есть в билетах, так называемое.
Смещение спектра по частоте.

Пусть

$$F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$$

Причём ширина импульса f(t) много больше периода волны с частотой ω_0.
Тогда

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2}\tilde{g}(\omega - \omega_0)$$

Где G(ω) – соответствующее разложение f(t).
Опустим доказательство этого факта (у Русакова оно есть, кстати). Лучше проанализируем результат. Мы исходную функцию домножили на некий косинус, то есть f(t) – огибающая для F(t). А внизу у нас, получается, графики для g и G одинаковы, только сдвинуты на ω_0.
Сразу скажу, что меня настораживает: при $\omega_0=0$ сдвиг, очевидно, равен 0, но и F(t)=f(t)*cos0. То есть F(t)= f(t), а вот жешки отличаются на ½.

Интенсивность. Спектральная плотность интенсивности S(ω).
Интенсивность – это квадрат напряжённости (с точностью до размерной константы, но это мы опустим). Так как вклад каждой частоты в общую напряжённости вносит g(ω), то вклад каждой частоты в общую интенсивности вносит… наверное, квадрат g(ω)? Сейчас посмотрим.
Введём спектральную интенсивность S(ω) как

$$S(\omega) \overset{def}{=} |\tilde{g}(\omega)|^2 = g^2(\omega) =$$

$$= a^2(\omega) + b^2(\omega)$$

a(ω), напомню, из разложения по косинусам, b(ω) – из разложения по синусам.

Кстати, а почему $g^2(\omega)=a^2(\omega)+b^2(\omega)$? Тут чистая тригонометрия. Дело в том, что $a(\omega)*\cos(\omega t)+b(\omega)*\cos(\omega t)=\mathrm{sqrt}(a^2(\omega)+b^2(\omega))*\cos(\omega t-\varphi)$, где φ – некий угол.

Напомню, как правая часть получается из левой: левая часть делится на $\mathrm{sqrt}(a^2(\omega)+b^2(\omega))$, коэффициент $a(\omega)/\mathrm{sqrt}(a^2(\omega)+b^2(\omega))$ при косинусе обозначается за cos(φ), а коэффициент $b(\omega)/\mathrm{sqrt}(a^2(\omega)+b^2(\omega))$ при синусе обозначается за sin(φ).

Как мы видим, всё равно S(ω) через a(ω)+b(ω) выразилась, но сложнее, чем через g, для которого, однако, нам потребовались комплексные величины.

Вопрос, который нас интересует: правда ли, что

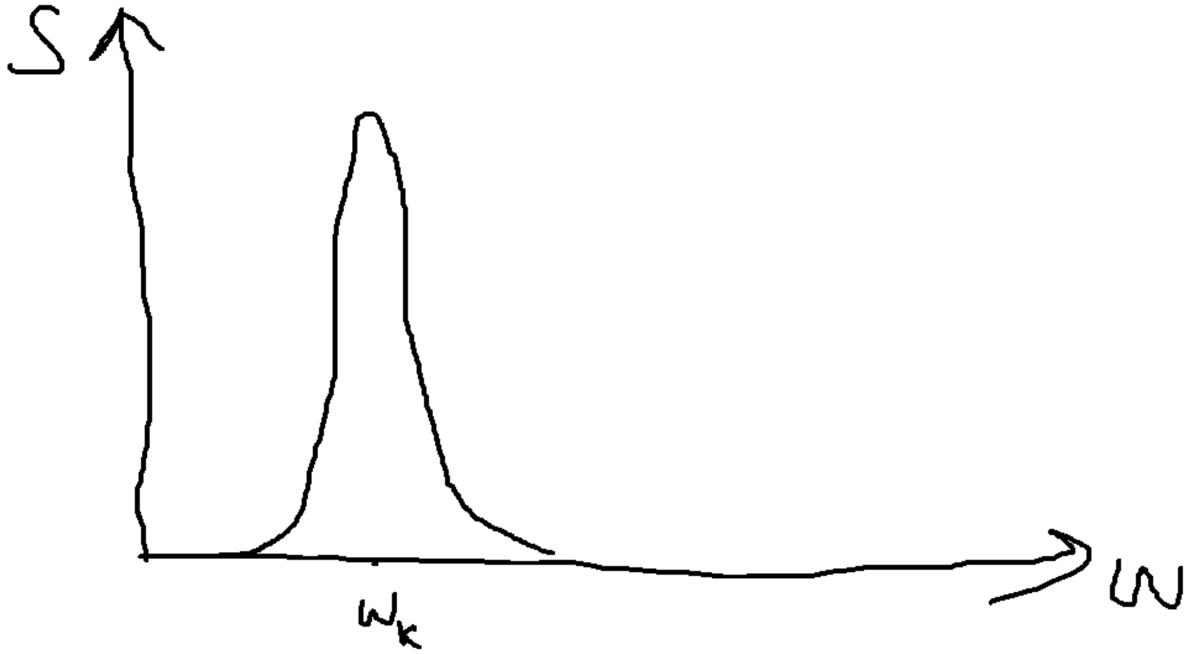
$$dI = S(\omega)\,d\omega$$

И, как следствие,

$$I_0 = \int_0^\infty S(\omega)\,d\omega$$

? Совсем скоро мы это докажем.
Вопрос этот не такой уж и очевидный. Дело в том, что интенсивность – это усреднение квадрата E по достаточно большому времени, гораздо большему периода. На этом времени все колебания как бы пропадают. Если нам нарисуют график зависимости E от времени, мы оттуда выцепим ω – одну, две или бесконечное число. Если нам нарисуют график зависимости I от времени, мы оттуда ω никогда не выцепим.

Меж тем у интенсивности есть цвет. Наш глаз, помимо интенсивности как мощности-яркости света, регистрирует цвет. Вот в наш глаз попадает свет с такой S(ω):



$\omega_к$ – частота красного света. Что увидит глаз? Правильно – красный свет.

Ну что же, давайте докажем, что действительно

$$dI = S(\omega)\,d\omega$$

И нам поможет теорема Планшереля.
Теорема Планшереля.
Эта теорема есть в билетах, так что её советую запомнить саму по себе.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{g}(\omega)|^2d\omega$$

Прежде чем докажем, задумаемся, что она значит.

В левой части квадрат f(t)=E(t(, то есть интенсивность. Идёт интеграл по всему времени, то есть идёт интенсивность, домноженная на время. Если домножить на площадь, то получим энергию всего импульса.

А справа – та же энергия, подсчитанная иначе: через интеграл по всем частотам от спектральной плотности интенсивности, то есть в чистом виде

$$I_0=\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega$$

(мы правда, это не доказали, но для понимания)

То есть мы подсчитали интенсивность волны двумя способами: через квадрат напряжённости, как обычно, и через S(ω). Собственно, теорема Планшереля нам и говорит, что мы МОЖЕМ считать через S(ω). Напоминаю, что S(ω) мы определили как квадрат модуля g(ω) или как $a^2(\omega)+b^2(\omega)$.

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right]^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}^*(\omega) e^{-i\omega t} dt \, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) d\omega$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot g(\omega)$$

Получаем $\frac{1}{2\pi} \int g(\omega) \tilde{g}(\omega) d\omega$, т.о. δ.

Теперь, когда мы доказатели теорему Планшереля, нужно обратить внимание вот на такой нюанс: в определении интенсивности мы измеряем средний квадрат напряжённости за некоторое время τ – время разрешения приёмника. А у нас интеграл от –бесконечности до +бесконечности. Что делать?

Заметим, что если мы заведомо знаем, что f(t)=E(t) представляется в виде суммы косинусов и синусов (конечной, или бесконечной), то у нас есть ровно две возможности:

1) Световой импульс. Он характеризуется

А) континуальным числом слагаемых, т.е. его спектр a(ω), b(ω) и S(ω) – это не дельта функции.

б) он спадает при t стремящемся к плюс-минус бесконечности. Более того, интеграл от –бесконечности до бесконечности от модуля E(t) должен сходиться.

Так вот, в этом случае подбираем τ приёмника такое, что вся активность происходит на участке от 0 до τ,и вуаля – интеграл от –бесконечности до +бесконечности равен интегралу от 0 до τ.
2) f(t) – периодическая функция. Тогда она раскладывается в ряд Фурье (конечный или бесконечный). Интегралом Фурье её представить так же можно, только всякие g(ω) и S(ω) будут дельта-функциями.
Предвижу вопрос: а что, если функция E(t) не убывает на бесконечности и не периодическая? Ответ: она не раскладывается в интеграл Фурье (см. Бутузова), не представима в виде суммы синусов и косинусов, а значит, не имеет физического смысла в оптике. Давайте сразу договоримся, что

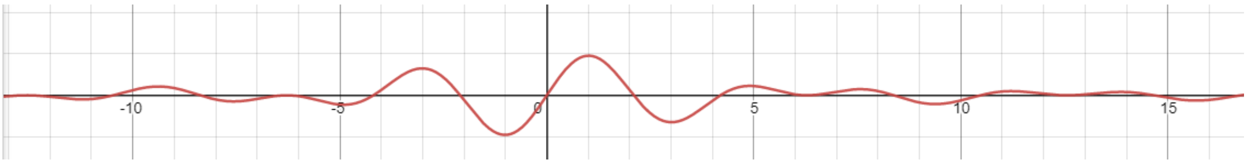
Факт: график g(ω) (или S(ω), в данном случае это не важно) представляет собой набор дельта-функций РАВНОСИЛЕН тому факту, что график f(t) затухает при t стремящимся к плюс-минус бесконечности.
Проясним математический и физический смысл утверждения.

Вот возьмём график sin(x). Он на бесконечности к нулю не стремится, но и его Фурье-образ (график g(ω) или S(ω)) – это одна дельта функция, потому что мода одна.
Возьмём какую-нить линейную комбинацию синусов-косинусов: 2*sin(x)-3*cos(2x)-5*sin(x/7). Убывает ли такая функция на бесконечности? Очевидно, нет, потому что она, как и любая линейная КОНЕЧНАЯ комбинация синусов-косинусов является периодической функцией. С каким периодом? Ну, нужно взять НОК (наименьшее общее кратное) от чисел, обратных аргументам, и домножить на 2π. Для данной функции периодом будет 14 π. А теперь посмотрим на Фурье-образ… и увидим три дельта функции: при x=1/7, 1 и 2. Ну естественно, у нас же КОНЕЧНАЯ линейная комбинация синусов косинусов. Таким образом, из того, что график g(ω) или S(ω) имеет вид торчащих штырей (суммы дельта функций) следует то, что функция периодична и на бесконечности, как следствие, не убывает.
А теперь возьмём функцию с менее тривиальным графиком g(ω) или S(ω). Например, хотя бы прямоугольным спектром.
Пусть частота будет простираться от 1 до 2 c^{-1}.

$$\int_1^2 \sin(kx)\,dk$$

(к сожалению, Десмос требует, чтобы аргументом был x, а не t, поэтому пришлось заменить t на x, а ω на k). Впрочем, график это не меняет!

Взглянем на график:



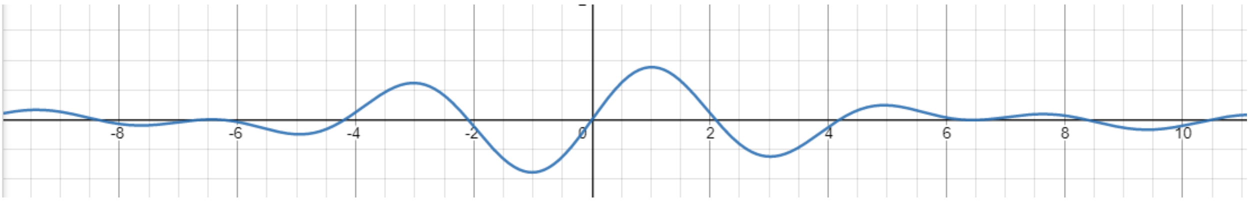
Он убывает!

Ещё пример:

$$\int_1^2 \sin(kx)\exp\left(-(1.5-k)^2\right)dk$$

Это квазимонохроматический свет – у него g(ω) имеет вид $C*\exp(-x^2)$.

График:



И вновь убывает.

Какой же физический смысл? Затухающие функции – это световые импульсы. А незатухающие – периодические.

Давайте составим даже табличку:

Периодическая функция	Световой импульс
Периодична	Не периодична
Не убывает на плюс-минус бесконечности	Убывает на плюс-минус бесконечности
Можно разложить в ряд (не интеграл) Фурье с конечным или счётным числом слагаемых	Нельзя разложить в ряд (не интеграл) Фурье с конечным или счётным числом слагаемых
S(ω) – непрерывная функция	S(ω) – набор дельта функций (конечный или счётный)

Для иллюстрации рассмотрим пример построения S(ω) по данной f(t):

■ **Пример 2.** Рассмотрим теперь функцию $f(t) = ae^{-t/\tau}\cos\omega_0 t$. Такая функция описывает напряженность электрического поля ($E = f$) в отдельном цуге излучения. Определим $|\widehat{f}_0(\omega)|^2$, пользуясь комплексным представлением (4.5):

$$\widehat{f}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/\tau}\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt. \qquad (4.8)$$

Опуская промежуточные выкладки, получим спектральную плотность

$$|\widehat{f}_0(\omega)|^2 = \widehat{f}_0(\omega)\,\widehat{f}_0^*(\omega) = a^2\frac{\omega^2+1/\tau^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\dfrac{\omega^2}{\tau^2}}. \qquad (4.9)$$

Для слабого затухания ($\omega_0 \gg 1/\tau$) и при $\omega \approx \omega_0$ выражение (4.9) можно значительно упростить, полагая $(\omega_0^2-\omega^2)^2 = 4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2$. Тогда

$$|\widehat{f}_0(\omega)|^2 = \frac{a^2}{4}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2+\dfrac{\omega_0^2}{\tau^2}} = \frac{a^2}{4}\tau^2 L(\omega), \qquad (4.10)$$

где

$$L(\omega) = \frac{1}{\tau^2(\omega_0-\omega)^2+1} \qquad (4.11)$$

— лоренцева функция.

График этой функции, называемый *лоренцевым контуром*, представлен на рис. 4.2.

Ширину $\Delta\omega$ этого контура находят из условия убывания функции L вдвое:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(\tau\dfrac{\Delta\omega}{2}\right)^2+1}. \qquad (4.12)$$

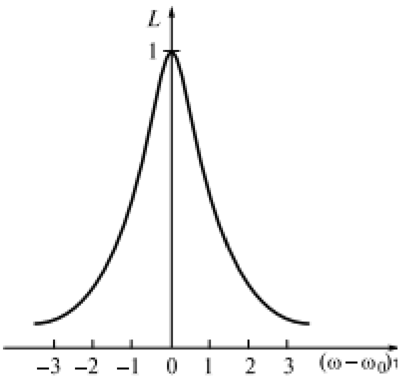


Рис. 4.2

Отсюда $\Delta\omega = 2/\tau$. Чем больше время затухания, тем уже контур. В пределе, при $\tau \to \infty$ $\Delta\omega \to 0$, как это имело место в предыдущем примере.

Как мы видим, исходная функция f(t) была световым импульсом (затухала на бесконечности), и спектральная плотность также представляет собой один максимум, затухающий на бесконечности.

А есть ли какая-то связь между полуширинами этих двух функций? Оказывается, есть.

Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра.

Точного определения ширины спектра нет. Мы можем определить её как ширина, на которой значение g с тильдой(ω) по модулю будет не менее чем β от максимального модуля.

Аналогично длительность импульса определим как время, на котором значение f(t) будет не менее чем α.

Оказывается, что для любых α и β будет выполняться свойство, что произведение длительности импульса на ширину спектра будет являться постоянным.